CENTRE INTERUNIVERSITAIRE DE RECHERCHE PLURIDISCIPLINAIRE (CIREP)
STATUT : UNIVERSITE PUBLIQUE
Web : www.cirep.ac.cd
Email : info@cirep.ac.cd

NOTES DU COURS DE THEORIE DE PRISE DE DECISION EN GESTION DE L'EDUCATION

OBJECTIFS DU COURS

Objectif général :

Le cours vise à fournir aux étudiants une compréhension approfondie des théories, des concepts et des pratiques liés à la prise de décision en gestion de l'éducation, en mettant l'accent sur l'analyse critique, la résolution de problèmes et l'amélioration des processus décisionnels dans les institutions éducatives.

Objectifs spécifiques du cours :

- ✓ Comprendre les principaux modèles théoriques de prise de décision en gestion de l'éducation et leur application dans les contextes éducatifs variés.
- ✓ Acquérir des compétences en matière d'analyse des données, d'évaluation des options et de prise de décisions éclairées dans le domaine de l'éducation.
- ✓ Explorer les facteurs internes et externes qui influencent les processus décisionnels dans les établissements scolaires.
- ✓ Examiner les implications éthiques, légales et politiques des décisions prises en matière d'éducation.
- ✓ Étudier les stratégies de communication et de consultation pour impliquer les parties prenantes dans le processus décisionnel.
- ✓ Analyser les défis liés à la mise en œuvre des décisions et évaluer leur impact sur la qualité de l'enseignement et de l'apprentissage.
- ✓ Explorer les tendances émergentes en matière de prise de décision en gestion de l'éducation, telles que l'utilisation des technologies numériques et l'approche basée sur les données probantes.
- ✓ Développer des compétences en résolution de problèmes complexes et en leadership pour améliorer la gouvernance et la gestion des institutions éducatives.

Introduction

Pourquoi élaborer une théorie pour prendre des décisions ? Quels décideurs ressentent-ils la nécessité d'une théorie ? Nous prenons des décisions à chaque instant sans que cela ne nous pose de problème. Souvent, pourtant, nous rencontrons des situations où les conséquences de nos choix méritent réflexion, où nous éprouvons le besoin d'analyser, de rationaliser et, si cela est possible, de nous faire aider. Lorsque tel est le cas, nous devenons un décideur, nous pouvons éprouver le besoin de justifier nos choix, voire être fortement invités à le faire par ceux devant lesquels nous sommes responsables. Une théorie sur laquelle peuvent se fonder les choix une théorie de la décision répond à ce besoin : elle permet de rationaliser les décisions.

La difficulté de justifier ses choix n'est pas la seule que peut rencontrer un décideur. Même dans le cas où la décision ne concerne que lui-même, le décideur peut ne pas savoir comment « prendre » le problème, c'est-à-dire comment l'ana- lyser, décrire les décisions alternatives et leurs conséquences, mesurer la portée de ses actes… C'est aussi pour tenter de répondre à ces questions que la théorie de la décision s'est développée.

Les différents aspects de la description et de la résolution de problèmes de décision que nous introduisons dans cet ouvrage ont pris forme durant la seconde moitié du XXe siècle et constituent la *théorie de la décision.*

Cette théorie résulte de plusieurs siècles de recherches sur la formalisation du hasard et sur l'étude des jeux de société, sur l'analyse des problèmes économiques et politiques, et, plus récemment, sur les problèmes de gestion, mais aussi sur les fondements psychologiques de la représentation du comportement.

La formalisation d'un problème de décision, c'est-à-dire la description de ses éléments par des valeurs, des fonctions, des graphes, correspond à une simplification qui permet d'utiliser des outils et des résultats mathématiques. Nous présentons aux chapitres II et III un certain nombre d'exemples de problèmes de décision pour mieux comprendre comment les formaliser.

Ces théories utilisent des résultats de la théorie des probabilités qui permet de décrire et de quantifier des expériences aléatoires. Mais le calcul des probabilités nécessite des données qui sont tirées des observations (« la probabilité que le taux de change du dollar face à l'euro augmente dans les trois prochains mois » sera estimée à partir des fluctuations de ces taux observés par le passé). C'est l'objet de la statistique de nous donner les moyens d'extraire de tels paramètres des résultats observés. À partir d'observations de variables considérées comme aléatoires, le statisticien infère des valeurs caractéristiques (comme la moyenne) des lois de probabilités qui régissent ces observations. Par exemple, à partir d'un échantillon de votants pris au hasard, on estime le nombre moyen des intentions de vote pour un candidat. Cette inférence est une décision, elle dépend de la méthode et du critère utilisés par le statisticien, critères que la théorie de la décision pourra lui permettre de justifier (auprès de ses commanditaires, notamment).

I / Rationalité des choix :

Perspectives et origines de la théorie

Faire un choix rationnel ! Beaucoup de décideurs le souhaitent et y travaillent. Dans les problèmes d'investissement, d'écologie, de sécurité routière et, plus généralement, dans les problèmes de choix industriels ou politiques dont les conséquences concernent la société, le choix final voudrait être fondé sur des arguments à caractère scientifique : il voudrait être rationnel.

La théorie de la décision se fonde sur un ensemble de descriptions des problèmes de décision à partir desquelles des ana- lyses cohérentes peuvent être menées ; elle propose des principes sur lesquels des critères de sélection sont construits et des solutions seront proposées. La théorie donne donc les moyens aux décideurs non seulement d'analyser leurs problèmes, mais aussi de pouvoir justifier les solutions pro- posées : elles sont rationnelles. La description des problèmes de décision utilise le « langage » mathématique parce que c'est un langage universel, d'une part, et, d'autre part, parce qu'il permet d'utiliser de puissants outils d'analyse.

Cela ne veut pas dire que le champ d'application soit strictement limité à des problèmes quantitatifs, la mathématique ne ramène pas tout aux nombres ! Il est certain toutefois que, dans la pratique, les décisions proposées par la théorie seront généralement quantifiées. Les décisions économiques, qui sont par nature quantifiées, seront naturellement fondées sur une analyse et sur des méthodes quantitatives. La difficulté rencontrée dès l'abord vient de ce que certains éléments de l'environnement économique ne sont pas tous aisément quantifiables : les impondérables météorologiques (qui influent sur les récoltes), les contextes géopolitiques (blocus, guerres) et surtout les comportements des différents acteurs économiques. Cela ne doit pas nécessairement faire abandonner l'approche quantitative sous le prétexte que toute quantification serait réductrice et partiellement arbitraire. Un des objets de la théorie de la décision est de donner les moyens de construire des descriptions quanti- fiées des problèmes, ainsi que des critères, qui permettent d'y apporter des solutions. Bien entendu, le calcul du prix de vente d'un robot ménager, à partir des coûts de production et d'une estimation de la demande de ce produit, se prête mieux à une étude quantitative que le choix d'un nouveau directeur commercial.

1. Quelles théories de la décision ?

Ou encore, la théorie de quelles décisions ? Le besoin de rationaliser les choix se fait sentir aussi bien pour les gestionnaires qui traitent de problèmes complexes, mais sans incertitude, que pour ceux, les actuaires et les financiers notamment, dont le souci principal vient de l'incertitude sur les conséquences de leurs choix. Doit-on traiter séparément chaque type de problème et lui proposer une théorie adaptée ? La théorie de la décision se construit de manière à pouvoir intégrer différents types d'incertitude, et nous aurons donc une théorie qui pourra s'appliquer à des problèmes de décision qui se posent à des agents situés dans des environnements de natures variées. Mais outre les utilisateurs directs des recommandations d'une théorie, la rationalisation des choix est un élément essentiel à la construction de nouvelles théories qui mettent en jeu des décideurs, dans les sciences de l'homme et de la société. La théorie économique est construite sur la description du comportement d'agents (consommateurs, producteurs) ; les modèles de la gestion doivent faire des hypothèses sur la représentation des objectifs à atteindre. Les situations suivantes font appel à la théorie de la décision ; elles aideront à en clarifier les différents aspects.

2. Aperçu historique de la représentation de l'incertitude

Le fait que les conséquences de nos actes ne dépendent pas uniquement de nos décisions a dû s'imposer très tôt à la conscience humaine. Avant toute analyse scientifique des phénomènes, les facteurs qui échappent au contrôle des décideurs ont été attribués à la volonté d'entités anthropomorphes : les dieux et les démons. Les langages magico-religieux peuvent être considérés comme les premières représentations de l'incertitude. Au fur et à mesure de l'avancée des analyses scientifiques, le rôle de la formalisation démonologique a reculé devant les théories et d'autres types de formalismes.

3. Les fondateurs de la théorie de la décision

En 1957, paraît un ouvrage qui reste à ce jour une très bonne référence des théoriciens de la décision : *Games and Decisions (Jeux et décisions)* de Luce et Raiffa [1957]. Le point y est fait sur l'état de l'art à cette époque et de nombreuses suggestions sur des extensions et des applications possibles y sont pro- posées. Si, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, la théorie de la décision s'est largement développée depuis, c'est sur les résultats présentés dans cet ouvrage que se sont appuyés à la fois et la plupart des recherches en économie de l'incertain, et la plupart des méthodes d'aide à la décision.

Comme l'indique le titre de l'ouvrage de Luce et Raiffa, il s'agit tout d'abord de présenter les résultats fondamentaux de la théorie des jeux alors toute récente, puisqu'elle a vu le jour sous sa forme moderne durant la Seconde Guerre mondiale (ses concepts de solution des problèmes de décision en situations de conflit devaient leur importance à l'actualité militaire). Mais la théorie des jeux elle-même requérait une théorie de la représentation du comportement individuel : c'est la théorie de l'utilité espérée proposée par von Neumann et Morgenstern [1944].

4. Les théories et les perspectives

La théorie de la décision individuelle est l'objet de notre présentation. Elle consiste, dans le cadre d'une description adéquate des différents éléments des problèmes de décision, à construire des critères fondés sur des hypothèses sur le comportement du décideur. Dans le cadre de ces hypothèses, le comportement rationnel consiste à optimiser ces critères. La théorie de la décision s'inscrit ainsi dans la perspective de la théorie économique qui met en jeu des agents, consommateurs et producteurs, et en formalise le comportement comme consistant à maximiser des « fonctions d'utilité » ou « fonctions de satisfaction » (nous simplifions, la théorie n'a souvent besoin que de « préférences » sans que celles-ci doivent être représentées par une fonction). L'agent économique est alors réduit au fameux *Homo economicus* qui peut faire sou- rire, mais qui a permis d'importantes avancées dans le domaine de la compréhension des prix d'équilibre.

II / Comment formaliser un problème de décision

Dans la mesure où un décideur est satisfait des solutions aux problèmes de décision qui se posent à lui et où il n'a pas de compte à rendre sur la manière dont il les a obtenues, aucun effort de rationalisation ne semble nécessaire. En revanche, dès que la solution n'est pas satisfaisante ou qu'il semble qu'elle puisse être améliorée, le décideur aura besoin d'analyser le problème. Cette analyse, qui conduit à une certaine formalisation (non nécessairement mathématique), permettra aussi d'expliquer plus aisément pourquoi telle solution a été retenue plutôt que telle autre. Le besoin de telles justifications se fait sentir dès que le décideur veut rendre des comptes sur sa décision, et, en particulier, dans les situations où les conséquences de la décision prise ne sont pas immédiatement appréciables. C’est pourquoi les ingénieurs et les gestionnaires utilisent fréquemment des formalisations de leurs problèmes de décision grâce à des graphiques, des arbres de décision, des tableaux, etc., et sont conduits à développer des méthodes et des critères qui per- mettent à la fois de calculer les meilleurs choix et de justifier la manière dont ils ont été obtenus. Ces méthodes sont fondées sur des modèles formalisés et les décisions sont prises en utilisant des résultats de la programmation mathématique, encore appelée théorie du contrôle, c’est-à-dire un ensemble de méthodes du calcul des optimums de fonctions.

1. **Un problème de décision formalisé : le choix de portefeuilles**

Vous avez un capital de 100 000 euros que vous désirez investir dans des actions et des obligations. Pour des raisons personnelles et institutionnelles (mais surtout pour simplifier l’exposé de cet exemple !), supposons que vous n’ayez le choix qu’entre les actions de quatre sociétés : Alfath, Bétard, Gam- mage et Deltham, et des bons du Trésor à trois mois. Vous pourriez former votre portefeuille en achetant pour 20 000 euros de chacun de ces titres et voir venir ! Si le taux de rendement pour trois mois des bons du Trésor est de 4 %, vous savez que vous récupérerez 20 000 + 800 = 20 800 euros dans trois mois. En ce qui concerne les 80 000 euros investis dans les autres actifs, vous ne savez pas ce qu’il adviendra dans trois mois.

Chacun des titres peut voir son prix monter ou descendre, c’est ce que vous avez pu observer sur les cours de la Bourse depuis un an, en comparant les cours de trois mois en trois mois. Les cours des différents titres ne varient pas tous autant ni de la même manière ; il faudrait préciser cela pour pouvoir les comparer. En faisant la différence du cours d’un actif à une certaine date et de son cours trois mois plus tard, vous obtenez son rendement. En divisant ce rendement par le cours initial, vous obtenez le taux de rendement à trois mois. Vous voyez ainsi, par exemple, que, pendant les trois derniers mois, les taux de rendement de tous les titres sont négatifs ! Si cet état de chose devait durer il ne faudrait sans doute pas investir dans ces titres et placer l'intégralité des 100 000 euros en bons.

Ce n'est pas ce que vous conseille votre oncle qui ne place que 10 000 euros en bons, 50 000 euros en Alfath, dont le taux de rendement les trois derniers mois est le plus négatif, et 20 000 euros en Bétard et en Gammage, dont les taux sont différents, mais moins élevés que celui de Deltham dans lequel il n'investit pas. Votre oncle n'est pas un théoricien de la décision, mais se flatte d'avoir du nez. Toutefois, sa décision, c'est-à-dire son choix de portefeuille, peut être expliquée si nous nous donnons la peine de formaliser ce qu'il fait intuitivement. Il ne fonde pas sa décision sur la seule observation des taux de rendement sur les trois derniers mois, mais sur les variations des cours sur une période bien plus longue.

De cette observation, on peut retenir que le taux de rendement d'Alfath varie irrégulièrement autour d'une valeur moyenne que vous pouvez calculer : c'est 8 %. Les deux autres titres retenus par votre oncle ont des taux moyens de 5 % et de 6 % respective- ment. Mais pourquoi a-t-il écarté le titre Deltham de son porte- feuille alors que son taux moyen est de 7 % et que, pendant la dernière période, il était, à – 1 %, le plus élevé ? Il vous dit qu'il n'a pas confiance, et, en regardant les cours passés, vous observez que leur variabilité a, en effet, une ampleur qui dépasse largement celle des autres titres. En revanche, il semble que la variabilité de Bétard et de Gammage soit très faible. Afin de vous fixer les idées, vous pouvez calculer les écarts (pris positivement) entre les taux calculés chaque jour et le taux moyen. Pour résumer cette série, vous pouvez en faire la moyenne. Vous trouvez des nombres positifs, appelés écarts positifs moyens, qui sont une mesure de la variabilité.

Vous trouvez 25 pour Deltham, 20 pour Alfath, 10 pour Gammage et 9 pour Bétard. Nous pouvons alors imaginer qu'intuitivement votre oncle a pris une décision qui s'explique par le raisonne- ment suivant : Alfath et Deltham peuvent rapporter gros, mais ils varient beaucoup, donc je n'investis pas tout dedans car j'aurai besoin de liquidités dans trois mois. Pour assurer un minimum, je place une partie en bons. Comme on constate aussi qu'ils varient à peu près dans le même sens (leurs taux sont fortement corrélés), il vaut mieux tout concentrer sur Alfath qui a un taux moyen supérieur et une variabilité légère- ment moindre. (Remarquons à ce point que tout le monde ne fait pas le même raisonnement que votre oncle car sinon le cours de Deltham s'effondrerait.) Quant aux deux autres titres, ils varient si peu qu'il y a peu de risque de perte, et leurs taux de rendement sont tout de même supérieurs à ceux des bons : j'en prends aussi.

Cet exemple a introduit les éléments qui serviront à formaliser un problème de décision. Nous le reprenons sous la forme plus abstraite que l'on trouve dans les manuels de finance.

Un portefeuille est une liste de quantités d'actifs détenus par un investisseur. Le problème de choix de portefeuille consiste donc à décider des proportions d'un certain capital donné que l'investisseur allouera à chacun des actifs de la liste.

1. Quelques exemples de problèmes de décision

Nous traiterons en détail le premier exemple : ce sera l'objet du chapitre III ; nous nous contentons ici d'une brève description afin de faire apparaître les différents éléments que nous avons relevés dans le paragraphe précédent.

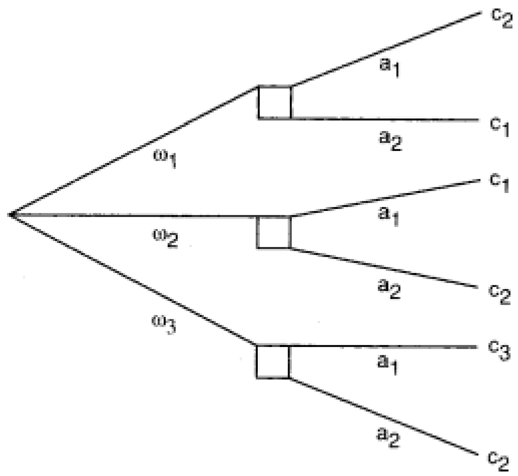
• *Exploitation minière.* — Une compagnie minière, possédant un droit d'exploitation sur un site, doit décider de l'exploiter ou non. Des relevés géologiques indiquent qu'il y a très vraisemblablement une quantité importante de minerai exploitable ; en revanche, sa qualité est inconnue. Il peut être décidé d'effectuer de nouveaux forages pour sonder la qualité du minerai, ceux-ci sont coûteux et leurs résultats ne sont pas certains. Il est aussi possible de faire appel à un expert ; lui aussi coûte cher et n'est pas infaillible. D'autres inconnues pèsent sur la décision : les coûts d'exploitation et les prix de vente futurs du minerai en particulier. Les décisions ont ici plu- sieurs composantes : forage (oui ou non), expertise (oui ou non) et exploitation (oui ou non). Les aléas ont au moins trois composantes : la qualité du minerai, la fiabilité du forage et/ou de l'expert, les prix de vente futurs. La conséquence d’une décision est le profit futur, il dépend des aléas selon une for- mule qui peut être établie dans chaque cas. Nous présenterons dans le chapitre suivant un traitement simplifié de ce problème.

Traitement d’une maladie. — Face à des symptômes précis, un médecin reste incertain quant au stade d’évolution de la maladie (les aléas sont les différents stades possibles). À un stade peu développé, un premier traitement est efficace à 90 % ; à un deuxième stade, il n’est plus efficace qu’à 50 %, mais un second traitement l’est à 80 % alors qu’il aurait des effets secondaires très graves au premier stade ; enfin, à un troisième stade, il n’y a plus rien à faire. Dans ce problème, les conséquences sont la guérison ou le décès du patient, les coûts de traitement et d’analyse sont négligeables ; en revanche, le temps est un facteur important sur l’évolution de la maladie.

2. **Arbres de décision**

Une manière de décrire un problème de décision consiste à en représenter les éléments sur un arbre, c’est-à-dire un graphe composé de sommets et d’arcs qui les rejoignent. Dans un problème de choix entre deux décisions a_1 a_2, dont les conséquences dépendent de trois états de la nature w_1, w_2, w_3, ceux-ci peuvent être représentés par trois arcs issu d’un sommet. À l’extrémité de chacun de ces arcs, les sommets représentent les situations où les décisions sont prises. Les décisions seront représentées aussi par deux arcs. Les six sommets terminaux correspondent alors aux conséquences finales contingentes aux chemins que l’on peut suivre le long de l’arbre.

L’intérêt de la représentation d’un problème de décision par un arbre, même s’il se révèle, en général, que cette représentation est partielle, réside dans le fait qu’elle permet de décrire le problème tel qu’il se présente, afin d’en faire apparaître progressivement les différents éléments. Dans l’arbre précédent, la conséquence c_2 est obtenue à partir de la décision a_1 si l’événement w_1 se réalise, mais de la décision a_2 si l’un des événements w_2 ou w_3 se réalise. Le choix de a_1 dépend donc de l’évaluation de la vraisemblance de la réalisation des événements.



3. Comment formaliser l'incertitude

Nous avons vu apparaître l'incertitude relative aux conséquences des décisions prises dans les exemples précédents

Dans le problème d'extraction minière, l'incertitude porte tout d'abord sur la présence ou non de minerai et sur sa qua- lité. En admettant que trois types de qualités : bon, faible et inexploitable soient retenus, nous avons quatre événements à considérer : pas de minerai, minerai inexploitable, faible minerai, bon minerai. Afin de décider de faire un sondage ou pas, la vraisemblance de ces événements sera prise en compte, elle pourra être quantifiée à partir de données d'experts. Mais il se peut qu'une telle quantification soit *a priori* jugée impossible, non fiable ou tout simplement dénuée de sens. En revanche, les prix de vente futurs sont une seconde source d'incertitude qui est du même type que celle des rendements d'actifs dans l'exemple précédent.

III / Comment résoudre un problème de décision

Nous avons exposé, au chapitre précédent, un problème d'exploitation d'un site minier. Précisons-le et voyons comment nous pouvons en résoudre une version simple [1]. Le décideur est une compagnie pétrolière et son expérience de la prospection lui permet de savoir qu'une première série de forages dans la zone en question donnera des résultats sur la qualité de la nappe ; ces résultats peuvent être répartis en trois catégories : P (positif), D (douteux) ou N (négatif).

L'expérience, dans des zones semblables, a montré que, dans cinquante pour cent des cas, le résultat était douteux et dans les autres cas le résultat n'était positif qu'une fois sur deux.

Indications du premier forage	*Probabilité de G*	*Probabilité de G*
P (positif)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
D (douteux)	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
N (négatif)	$\frac{1}{15}$	$\frac{15}{16}$

1. **Analyse du problème**

À ce stade de l'analyse du problème, les décisions que peut prendre le décideur sont de deux types : d'une part, mettre l'exploitation en route ou non ; d'autre part, faire procéder à l'un et/ou à l'autre forage. Nous avons, par exemple : ne pas faire de forage et abandonner le site ; ne pas faire de forage et mettre le site en exploitation ; faire un premier forage et mettre en route l'exploitation si le résultat n'est pas négatif ; faire les deux forages et procéder à l'exploitation si le site est déclaré exploitable, etc.

Mais au lieu de faire déjà une liste exhaustive, voyons quelles sont les conséquences des décisions.

Remarquons qu'il n'y a que deux aléas qui affectent les conséquences des décisions : soit le site est exploitable, G ; soit il ne l'est pas, G ; cette incertitude sera levée par la réponse du second forage ou par la mise en exploitation. Étant donné les informations de la compagnie concernant les probabilités d'occurrence des résultats des forages, la probabilité que le site soit exploitable est facile à calculer : c'est la probabilité que la réponse du second forage soit G ; celle-ci dépend de la réponse du premier forage ; nous avons, en notant p(G), cette probabilité :

$p(G) = p(G \text{ et } \{P \text{ ou } D \text{ ou } N\}) = p(\{G \text{ et } P\} \text{ ou } \{G \text{ et } D\} \text{ ou }$
$\{G \text{ et } N\})$.

La probabilité d'une réunion d'événements disjoints est la somme des probabilités de ces événements ; par ailleurs, chacun de ceux-ci est une intersection et nous savons que la probabilité de $p(G \text{ et } P) = p(G/P)p(P)$ [où $p(G/P)$ est la probabilité de l'événement G conditionnée par l'événement P, donnée par le tableau], nous avons donc :

$p(G) = p(G/P)p(P) + p(G/D)p(D) + p(G/N)p(N)$.

En utilisant les probabilités données, nous avons :

$$p(G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64} \approx 0{,}14.$$

Il est facile de vérifier avec la même méthode que l'on a bien :

$$p(GG) = \frac{55}{64} = 1 - p(G) \approx 0{,}86.$$

Ce qui veut dire que la compagnie sait qu'il y a très peu de chances que le gisement soit exploitable. Aussi, exploiter sans faire de forage pourrait présenter un grand risque : celui de perdre 106 unités à 86 chances contre 100, contre un gain possible, mais peu probable, de 914 unités.

Sur cet arbre, nous représentons par un carré les décisions partielles du décideur ; de ces carrés partent des arêtes qui représentent les conséquences momentanées de cette décision. Au départ, trois décisions possibles : abandonner le site (A_1), exploiter sans forage (E_1) ou faire le premier forage (F_1).

Après (A_1), l'arête donne la conséquence : – 6.

Après (E_1), les conséquences dépendent de l'exploitabilité du site ; nous représentons les deux possibilités par des arêtes par- tant d'un rond, elles correspondent à G et G ; nous en indiquons les probabilités entre parenthèses. Au bout de ces arêtes, les conséquences sont 914 et – 106.

Après (F_1), trois résultats aléatoires sont possibles : P, D et N, nous les représentons par des arêtes partant d'un rond sur lesquelles sont indiquées les probabilités de ces résultats. Au bout de chacune de ces arêtes, nous représentons par un carré la prise d'une nouvelle décision partielle : abandonner (A_2), exploiter (E_2) ou faire le second forage (F_2).

Après (A_2) et (E_2), les arêtes donnent les conséquences finales.

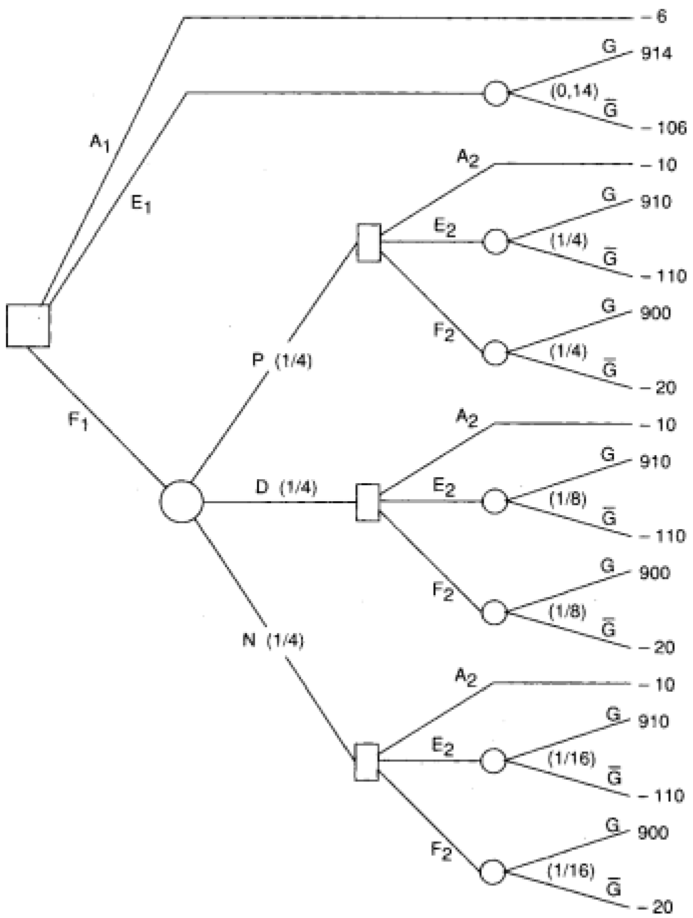
Après (F_2), les arêtes conduisent à des ronds d'où partent les dernières arêtes correspondant aux réponses finales et à leurs conséquences en termes de profits (positifs ou négatifs).

Le schéma nous donne la vision d'ensemble des décisions partielles et des informations qui pourront être obtenues à partir de la décision de faire le premier forage. Sur ce schéma, nous pouvons lire toutes les décisions qui incluent F_1, ainsi que leurs conséquences. Les chemins sur l'arbre sont appelés des stratégies ; ce sont des suites d'arêtes telles F_1, D, A_2, ce qui se lit : « Faire le premier forage, et, si la réponse est douteuse, arrêter. » Sa conséquence est – 10. Ou encore, F_1, D, F_2 :

« Faire le premier forage, et, si la réponse est douteuse, faire le second, puis (nous l'avons sous-entendu) exploiter si et seule- ment si le site est exploitable. » Sa conséquence est 900 si le site est exploitable, – 20 sinon. Nous trouvons donc une liste de 14 stratégies possibles et la liste de leurs conséquences pour chaque état aléatoire.

Arrêtons-nous un instant sur deux manières d'envisager ce problème.

ARBRE DE DÉCISION DU PROBLÈME D'EXPLOITATION



2. **Traitement statique du problème de décision**

Nous considérons le problème globalement, c'est-à-dire que nous définissons les différentes décisions possibles concernant tout le processus, et, sur la base d'un critère que nous nous donnons, nous choisissons parmi ces décisions. Les décisions, telles que nous les avons définies au chapitre précédent, sont des ensembles de stratégies telles celles qui comprennent F_1 et F_2 ; on remarque sur l'arbre du schéma que toutes ces stratégies ont les mêmes conséquences finales. Appelons F_1-F_2 une telle décision, sa conséquence si G se réalise est 900 et – 20 sinon.

La fonction qui relie les conséquences et les aléas aux décisions peut être définie par le tableau suivant :

Décisions / *Aléas*	A_1	E_1	F_1-A_2	F_1-E_2	F_1-F_2
G	– 6	914	– 10	910	900
G	– 6	– 106	– 10	– 110	– 20

Il est alors immédiat de voir que la décision F_1-A_2 a des conséquences pires que celles de A_1 dans tous les cas ; on dit que A_1 domine F_1-A_2 et on ne garde pour le reste de l'analyse que celle qui n'est pas dominée. Pour la même raison, on peut éliminer aussi F_1-E_2 qui est dominée par E_1, comme on s'en doutait bien. Il reste donc à comparer.

Décisions / *Aléas*	A_1	E_1	F_1-F_2
G	– 6	914	900
G	– 6	– 106	– 20

… et, pour cela, il nous faut un critère.

La compagnie peut tout d'abord exprimer certaines contraintes ; par exemple : « La perte ne peut pas dépasser
100. » Dans ce cas, la décision E_1 est éliminée, mais il faut tout de même un critère pour examiner les deux dernières décisions. Le profit moyen (ou, plus correctement, « espérance mathématique du profit »)

est un critère, nous le verrons au chapitre IV. Le gain moyen de F_1-F_2 est : 900 □ 0,14 – 20 □ 0,86 = 126 – 17,2 = 108,8, qui est largement positif. Dans ce cas, la décision de faire les forages sera prise même si l'on n'élimine pas la décision E_1 puisque le profit espéré de celle-ci est : 914 □ 0,14 – 106 □ 0,86 = 127,96 – 91,16 = 36,8, bien inférieur à celui de F_1-F_2.

3. Traitement dynamique du problème de décision

Si nous prenons en compte le rôle du temps, les décisions sont les stratégies, c'est-à-dire des suites de décisions. Chacune de celles-ci sera prise selon des critères qui portent sur leurs conséquences momentanées ; ces critères dépendent donc généralement du temps et de l'état de l'information. Le fait que les critères dépendent aussi du processus de décision introduit de grandes difficultés théoriques que nous allons éviter en supposant, ici, que le décideur s'en tient toujours au même critère, celui du profit espéré, par exemple.

Sous cette hypothèse, nous allons pouvoir utiliser le principe de la programmation dynamique : selon ce principe, le décideur va remonter le temps en partant de la fin, en choisissant à chaque étape la décision momentanée la meilleure ; sa stratégie optimale sera alors formée de la suite des décisions optimales en chaque instant.

Traitons le problème une première fois en utilisant le premier tableau de probabilités conditionnelles.

Plaçons-nous donc à l'instant où le premier forage a déjà été fait et considérons les différents cas.

Il est facile de calculer que, dans tous les cas, c'est la décision momentanée, F_2, qui a le plus grand profit espéré (210 ; 35 ; 37,5 au lieu de 165 ; 17,5 ; – 45,55 pour E_2 respectivement dans les cas P, D et N).

Plaçons-nous alors à l'instant précédent où il faut comparer A_1, E_1 et F_1. Nous connaissons les profits espérés de A_1 et de E_1, il nous reste à calculer celui de F_1. Nous considérons que les conséquences de F_1 sont les profits espérés des décisions momentanées que nous avons sélectionnées dans l'étape précédente. Ici, il s'agit chaque fois de F_2 dont les profits espérés sont, selon les cas :

c_P = 900 p(G/P) – 20 p(GG/P) ; c_D = 900 p(G/D) – 20 p(G/D),

et

c_N = $\bar{9}$10 p(G/N) – 20 p(G/N).

Le profit espéré de F_1 est alors : c_Pp(P) + c_Dp(D) + c_Np(N), ce qui, en mettant en facteur nous donne :

900 [p(G/P)p(P) + p(G/D)p(D) + p(G/N)p(N)] – 20

[p(G/P)p(P) + p(G/D)p(D) + p(G/N)p(N)]

soit, tout simplement : 900 p(G) – 20p(G), qui est le profit espéré de la décision statique F_1-F_2 (que nous avons déjà cal- culée : 430,8).

Bien sûr ! Cela vient du fait que, puisque dans la seconde étape nous choisissons toujours la même décision, l'aspect dynamique du problème disparaît.

En utilisant les utilités espérées, nous aurions eu le même effet. Dans la seconde période, après le résultat du premier forage, nous aurions trouvé que, dans tous les cas, l'utilité espérée de F_2 est supérieure et donc que, dans la première période, l'utilité espérée de F_1 est celle de la décision (globale) F_1-F_2 (nous avions trouvé : 31,35).

Dans ce cas, les conclusions du traitement dynamique du problème sont identiques à celles du traitement statique du fait que le décideur ne prend pas des décisions qui dépendent de ses informations en seconde période.

L'aspect dynamique du problème ne disparaît pas si les décisions momentanées de la seconde période diffèrent selon le résultat du premier forage. C'est ce qui se passe si les probabilités conditionnelles sont celles du second tableau :

— si le premier forage est positif, la probabilité d'avoir un gisement exploitable est si haute qu'il vaut mieux procéder immédiatement à l'exploitation (son profit espéré est supérieur) ;

— en revanche, dans le cas où le premier forage donne un résultat douteux, c'est la décision de faire un second forage qui doit être prise ;

— enfin, dans le dernier cas, la probabilité d'avoir un gisement exploitable est si faible qu'il vaut mieux abandonner.

La décision est donc véritablement une stratégie, elle consiste à faire le premier forage, puis, selon les cas, à exploiter sans attendre, à faire un second forage ou à abandonner le site.

Revenons alors à la première étape. Les conséquences de la décision F_1 sont les suivantes :

$c_P = 910 \times 0,95 - 110 \times 0,05 = 864,5 - 5,5 = 859.$

(Alors que le profit espéré de F_2 ne serait que de : $900 \times 0,95 - 20 \times 0,05 = 854.$)

$c_D = 900 \times 0,5 - 20 \times 0,5 = 440.$

(Alors que le profit espéré de E_2 ne serait que de : $910 \times 0,5 - 110 \times 0,05 = 400.$)

$c_N = - 10.$

(Alors que le profit espéré de F_2 ne serait que de : $900 \times 0,01 - 20 \times 0,99 = - 10,8$ et le profit espéré de F_2 ne serait que de : $910 \times 0,01 - 110 \times 0,99 = - 99,8.$)

Le profit espéré de la décision momentanée F_1 est alors : $0,25 \times 859 + 0,5 \times 440 - 0,25 \times 10 = 214,75 + 220 - 2,5 = 435,25.$

Celui de la décision E_1 est : $914 \times 0,49 - 106 \times 0,51 = 447,86 - 54,06 = 393,8.$

Ainsi le traitement dynamique du problème conduit le décideur à suivre la stratégie qui consiste à faire le premier forage, puis à exploiter, faire un second forage ou abandonner, selon les cas.

Moralité

« Rien ne sert de courir, il faut partir à point »… Le lièvre et la tortue en sont un très mauvais témoignage, d'abord parce qu'ils ne font généralement pas la course et que, lorsque la garrigue prend feu, c'est malheureusement la tortue, et non le lièvre, dont la chair est bien meilleure, qui est rôtie à point. La fable, dite par La Fontaine, est pourtant un régal. Cet exemple de problème de décision ne prétend pas l'être, mais il nous a permis, comme les fables, de soulever quelques lièvres :

— *la formalisation :* elle simplifie extrêmement le problème. Il faut veiller à n'en pas perdre des éléments sous l'influence de quelques données ; ici, le tableau des probabilités conditionnelles de départ pouvait cacher l'aspect dynamique du problème ;

— *l'ébauche d'un arbre de décison :* l'arbre entier étant généralement trop important pour être proprement dessiné, l'ébauche permet de mettre en évidence les éléments pertinents du problème ;

— *la liste des décisions :* elle est souvent simplifiée par les considérations de dominance, celles-ci sont établies en analysant les conséquences ;

— *les conséquences :* dans la fable, elles sont absentes, si le feu de garrigue suscite la course, le lièvre part à point. Les décisions seront rangées selon les pertes et les gains, mais ceux-ci dépendent généralement d'aléas ;

— *les aléas :* il est fondamental de les répertorier, et, autant que possible, de les quantifier parce qu'ils pourront être ainsi agrégés dans un critère ;

— *un critère :* c'est une fonction des conséquences dont on cherche le maximum (ou le minimum si c'est un critère qui décroît en fonction de ce que le décideur préfère), nous en verrons quelques-uns au chapitre IV, les deux que nous avons utilisés sont les plus connus, ils ne sont pas exempts de défauts : le premier (profit espéré) ne tient pas compte de l'asymétrie entre la perception des gains et des pertes ; le second, que nous justifierons au chapitre V et que nous utiliserons aux chapitres VI et VII, ne tient pas compte de la perception subjective des probabilités (c'est-à-dire de la déformation subjective des probabilités données).

IV / Critères de décision

Le problème traité dans le chapitre précédent a nécessité l'emploi d'un critère pour comparer les décisions. Nous avons introduit deux critères permettant de faire un choix entre des décisions dont les conséquences sont incertaines, nous les verrons à nouveau plus loin (paragraphe 3) en compagnie d'autres critères classiques. Nous nous concentrons tout d'abord sur le rangement des conséquences elles-mêmes et celui qui s'en déduit pour les décisions dont les conséquences sont certaines (paragraphe 1). Nous établissons le rapport entre ces rangements (préférences) et l'optimisation d'un critère (paragraphe 2) ; nous poursuivrons cette démarche au chapitre suivant pour justifier le fondement du critère de l'utilité espérée. Auparavant, nous aurons passé en revue plusieurs difficultés concernant les critères : les critères multiples, l'agrégation des critères de décideurs différents et le problème de la dynamique rencontré dans le chapitre précédent.

1. **Décisions rationnelles sans incertitude**

Pour choisir la meilleure décision (ou l'une parmi les meilleures), il faut les avoir ordonnées. Ranger les décisions ne peut se faire que lorsque le décideur sait remonter des conséquences qu'il a rangées aux décisions elles-mêmes. C'est en cherchant à exprimer son ordre de préférence sur les conséquences que le décideur se rend souvent compte de la nécessité de définir très précisément les conséquences de ses décisions.

Pour souligner les difficultés que peuvent présenter ces deux étapes, prenons l'exemple du choix d'investissements sans risque. Il s'agit d'un problème de décision sans incertitude puisque les taux de rendement des différents actifs sont connus. Cependant, en cherchant à déterminer un ordre sur ces actifs, l'investisseur se rendra souvent compte que les taux de rende- ment annoncés ne lui suffisent pas à comparer les actifs : d'autres éléments comme les facilités de paiement, les dates d'échéances qui peuvent influencer la taxation des revenus, la fréquence des versements, etc. font que deux actifs de mêmes taux ne seront pas nécessairement indifférents pour un investisseur donné.

Les conséquences des investissements pourront alors être définies par des rendements calculés par des procédures comptables faisant intervenir les différentes caractéristiques pertinentes : taux, taxes, échéanciers… Appelons « rendements actualisés » ces conséquences des investissements. La définition des conséquences étant donnée (grâce aux comptables), reste à les comparer. Ici les rendements actualisés s'ordonnent naturellement par valeurs croissantes et cet ordre est celui des préférences de la plupart des investisseurs. Une fois ce rangement des conséquences établi, l'investisseur pourra s'interroger sur les décisions qui amèneront aux meilleures conséquences.

Supposons que les investissements possibles portent sur des actifs d'échéances différentes. Pour définir la fonction conséquence (qui relie décisions et conséquences), il faudra établir une procédure d'actualisation qui permette de comparer les rendements. Une fois la fonction conséquence bien définie, la structure même des décisions rendra leur rangement plus ou moins aisé. Supposons que les décisions de l'investisseur puis- sent jouer sur deux variables : la quantité investie et l'échéance. L'ordre sur les conséquences est simple, mais il ne s'en déduit pas immédiatement un ordre sur les décisions qui permette de faire un choix. Cela vient de ce que les décisions ont ici deux composantes : à échéance donnée, les quantités investies sont naturellement rangées dans l'ordre des rendements qu'elles procurent ; à quantité fixée, les échéances sont rangées dans l'ordre des taux qu'elles procurent.

2. **Représentation des préférences par un critère**

Lorsqu'une collection de pièces de monnaie courante est présentée à un adulte et à un enfant, il est possible de prévoir le choix qu'ils vont respectivement faire parce que nous connaissons leurs préférences. En ce qui concerne l'adulte, sachant qu'il a une préférence pour le pouvoir d'achat le plus élevé, on se doute que son choix se portera sur une des pièces sur laquelle est inscrit le plus grand chiffre. Quant à un enfant que le pouvoir d'achat ne concerne pas encore, une observation plus fine de son comportement vis-à-vis des objets devra avoir été faite au préalable. Admettons que l'enfant préfère les choses les plus colorées et les plus brillantes, nous pourrons prédire qu'il choisira la plus brillante des pièces colorées lorsque l'alternative est simple, mais nous ne saurons peut-être pas laquelle il choisira entre une pièce d'un euro (brillante) et une pièce de 20 centimes (plus colorée mais terne).

3. **Critères classiques de décisions dans l'incertain**

Un critère est donc une fonction qui associe un nombre à chaque décision et qui croît avec les préférences du décideur. Quand il n'y a pas d'incertitude sur les conséquences des décisions, nous avons vu au paragraphe 1 qu'il suffisait de définir le critère sur les conséquences (les taux de rendement des investissements, par exemple), pour l'obtenir sur les décisions elles-mêmes, une fois que la fonction qui relie décisions et conséquences est clairement définie.

Mais quand les conséquences des décisions sont aussi fonction d'un aléa, il n'est plus aussi simple de remonter des conséquences aux décisions. Nous avons vu au chapitre précédent que, d'une manière ou d'une autre, il nous fallait agréger les différentes conséquences d'une même décision pour obtenir un critère. C'est ce que font les différents critères que nous présentons ici en utilisant, ou non, des probabilités sur les aléas.

L'approche axiomatique, qui est celle de la théorie de la décision, a été précédée par le développement de méthodes pragmatiques de résolution de problèmes de décision. Nous présentons, au chapitre V et au chapitre VIII, des constructions de critères représentant les préférences d'agents qui vérifient certains axiomes. Il est par ailleurs important, et c'est ce que nous faisons ici, de signaler l'utilisation d'un certain nombre d'autres critères dont l'emploi est justifié par des considérations adaptées à certains problèmes de décision, mais qui n'ont généralement pas été construits à partir d'une représentation axiomatique des préférences de décideurs.

Voyons sur un petit exemple comment les différents critères que nous présentons comparent trois décisions dont les conséquences dépendent de trois états aléatoires.

Considérons trois investissements (a, b et c) dont les taux de rendement possibles, selon l'état qui se réalisera à l'échéance, sont :

— pour a : 10 % 20 % 30 % ;

— pour b : 4 % 25 % 30 % ;

— pour c : 5 % 15 % 50 %.

C'est volontairement que nous ne précisons rien sur la vraisemblance ou la probabilité d'occurrence de ces états, nous ne le ferons que lorsque certains critères le nécessiteront.

V / Le risque

Nous avons défini les situations de risque comme celles dans lesquelles les conséquences des décisions prises dépendent d'aléas dont la distribution de probabilité est connue. Cette définition, qui est celle communément utilisée en théorie de la décision et en économie de l'incertain, ne recouvre certaine- ment pas toutes les situations que le langage courant désigne- rait comme risquées. Il y a un risque à sauter en parachute, à s'approcher d'un volcan, à rouler à gauche sur une route française (et même à droite, surtout le samedi soir !), mais dans chacun de ces cas la probabilité d'accident n'est pas connue. Toutefois, si une compagnie d'assurances décidait d'offrir un contrat pour ces types de risques, elle se livrerait généralement à une étude statistique. De cette étude, des paramètres de la distribution des probabilités d'accidents seraient déduits, ce qui permettrait de se ramener à une situation de risque telle que nous l'avons définie. Dans les cas où une telle étude statistique n'est pas pertinente (courses de chevaux, accident de centrale atomique), une étude d'experts pourra éventuellement attribuer des probabilités subjectives aux événements qui concernent les décisions. L'étude des risques et leurs mesures pourront donc se faire sur la base de distribution de probabilités qui régissent les conséquences.
L'analyse de l'aversion pour le risque que peuvent exprimer les décideurs doit recourir à une représentation de leurs comportements, la théorie de l'utilité espérée en a proposé une dans le cadre des situations de risque ; nous pré- sentons certaines de ses applications.

1. Aversion pour le risque, équivalent certain

Dans les problèmes de décision à caractère économique, les conséquences sont généralement exprimées en valeur monétaire (en richesse). De ce fait, puisqu'il s'agit de nombres, on peut parler de valeur moyenne (alors que, pour un problème de décision où les conséquences ne sont pas numériques, la notion de moyenne n'a pas de sens). Pour un agent qui adhère aux axiomes de la théorie de l'utilité espérée, tout se passe comme s'il assignait une valeur d'utilité à chaque niveau de richesse possible. Pour un tel agent, il sera possible d'évaluer son attitude vis-à-vis du risque en comparant les niveaux de richesse possibles et les valeurs d'utilité qu'il attribue à ces niveaux.

Un investissement risqué consiste à dépenser un certain capital (richesse) pour obtenir un rendement aléatoire. Dans une situation de risque on suppose connue la distribution de probabilité des rendements possibles, autrement dit, faire un investissement risqué revient à acheter un billet de loterie (au sens général où nous l'avons défini).

On appelle équivalent certain d'une loterie (d'une décision en situation de risque) une conséquence (ici un niveau de richesse) dont l'utilité est égale à l'utilité espérée de la loterie. Ce sera, par exemple, le prix maximal qu'un joueur sera prêt à payer pour un billet de loterie : le joueur est indifférent entre le billet de loterie et la somme de monnaie correspondant à son prix. Autrement dit, obtenir l'équivalent certain (qu'un agent donné attribue à une loterie) est donc indifférent, pour cet agent, aux lots incertains de la loterie. La valeur investie dans un actif risqué est l'équivalent certain des rendements possibles de cet investissement (si l'investisseur évalue ces rendements possibles par leur utilité espérée).

Ainsi, si l'utilité d'un investisseur est la fonction logarithme, l'utilité espérée d'un titre financier qui peut rapporter 100 euros avec une probabilité 1/4, ou 10 euros avec une probabilité 3/4, sera :

$u = 1/4 \ln 100 + 3/4 \ln 10 = 5/4 \ln 10 \text{ h } 5/4 \text{ x } 2{,}3 = 2{,}9$

L'équivalent certain de ce titre est donc un nombre, soit EC, tel que :

$\ln EC = 2{,}9$, soit $EC = \exp 2{,}9 \text{ h } 18{,}5$.

Sans une théorie de la représentation des préférences comme celle de l'utilité espérée, l'analyse du risque ne peut se faire qu'en comparant directement les distributions de probabilité.

Un critère élaboré en relation avec la notion de valeur de l'information Blackwell [1953] est fondé sur la définition suivante. Une distribution l'est plus risquée qu'une distribution l" de même moyenne, si la première est obtenue par une transformation aléatoire de la seconde. Par exemple, une distribution sur des revenus :

Revenus	800	600	17	–200
Probabilités	0,16	0,04	0,46	0,34